Examen final de Lógica (convocatoria junio). 13 de junio de 2017.
Parte 1

---

1. Sea A un conjunto no vacío.

    a) (1 punto) Define relación binaria en A. Define las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

    b) (2 puntos) Considera el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Define 4 relaciones distintas en A, de manera que ninguna de ellas sea la relación vacía, y que cada una de ellas cumpla 1 propiedad de las anteriores pero no las otras tres. Es decir, define 4 relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4 en A de forma que:

    - R_1 sea reflexiva pero no simétrica, ni antisimétrica, ni transitiva.
    - R_2 sea simétrica pero no reflexiva, ni antisimétrica, ni transitiva.
    - R_3 sea antisimétrica pero no reflexiva, ni simétrica, ni transitiva.
    - R_4 sea transitiva pero no reflexiva, ni simétrica, ni antisimétrica.

    Justifica bien todas tus respuestas (di por qué se cumplen unas propiedades y otras no).

2. (2 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas bien construidas de la lógica proposicional. Define por recursión una función f que, dada $\varphi \in L$, devuelva el siguiente valor:

$$\begin{gathered}5\cdot(\text{n}^{\text{o}}\text{ total de apariciones de símbolos de proposición atómica en }\varphi)+\\ 10\cdot(\text{n}^{\text{o}}\text{ total de apariciones de símbolos de conectiva de aridad 0 en }\varphi)+\\ 15\cdot(\text{n}^{\text{o}}\text{ total de apariciones de símbolos de conectiva de aridad 1 en }\varphi)+\\ 20\cdot(\text{n}^{\text{o}}\text{ total de apariciones de símbolos de conectiva de aridad 2 en }\varphi)\end{gathered}$$

3. (2,5 puntos) Demuestra la corrección del siguiente razonamiento utilizando el sistema de Gentzen. Puedes usar libremente las reglas básicas, las reglas derivadas y el teorema de la deducción.

$$\{p \to q,\ r \to s,\ q \wedge s \to t,\ \neg t\} \vdash \neg r \vee \neg p$$

4. (2,5 puntos) Considera el siguiente razonamiento:

$$\{p \wedge s,\ q \vee \neg r,\ t \to p\} \models (p \to q) \vee (p \to r)$$

    Para el grado en Matemáticas y el doble grado en Matemáticas y Educación Primaria: Determina si el razonamiento es correcto. Hazlo justificademente y sin utilizar una tabla de verdad.

    Para el grado en Ingeniería del Software, el doble grado en Matemáticas e Ingeniería del Software y el doble grado en Ingeniería Informática e Ingeniería del Software: Determina si el razonamiento es correcto usando tableaux. Emplea el mínimo número de tableaux que sea necesario. En caso de que el razonamiento no sea correcto, encuentra un contraejemplo.

Examen final de Lógica (convocatoria diciembre). 22 de diciembre de 2016.
Parte 2

5. (3 puntos) Formalizar el siguiente razonamiento:

   - A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.
   - Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.
   - Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.
   - Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.
   - Por tanto, algún delantero europeo jugó con botas blancas.

   Usa como dominio el conjunto de todos los jugadores de un mundial de fútbol y como símbolos de predicado:

   - $P(x)$: x es portero
   - $D(x)$: x es delantero europeo
   - $N(x)$: x viste camiseta negra
   - $B(x)$: x juega con botas blancas
   - $M(x, y)$: x marcó un gol a y

6. (2,5 puntos) Considera la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ definida por:

   $D = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

   $f(x, y) = xy$ (el producto);

   $P(x) = x$ es par (recuerda que 0 es par);

   $Q(x) = x$ es primo;

   $a = 0, b = 1$;

   Evalúa (determina si son **verdaderas o falsas**) las siguientes fórmulas bajo la interpretación dada:

   $\varphi_1 = \forall x \exists y (Q(x) \to (f(x, y) = b))$,

   $\varphi_2 = \exists x \forall y (P(x) \wedge (f(x, y) = a))$,

   $\varphi_3 = \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \to P(f(x, y)))$,

   $\varphi_4 = \forall x \exists y (Q(x) \vee P(f(x, y)))$.

   $\varphi_5 = \forall x \exists y (f(x, y) = b)$.

   Justifica tus respuestas.

7. (2,5 puntos) Demuestra la corrección del siguiente razonamiento utilizando el sistema de Gentzen. Puedes usar libremente las reglas básicas, las reglas derivadas y el teorema de la deducción.

$$\{\forall x (P(x) \wedge Q(x)),\ \forall y (P(y) \to R(y))\} \vdash \exists z (Q(z) \wedge R(z))$$

8. (2 puntos) En el conjunto formado por 3 elementos $D = \{a, b, c\}$ encuentra una interpretación que haga que la siguiente fórumla sea verdadera:

$$\forall x \exists y \exists z \exists t (\neg(y = z) \wedge P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg P(x, t))$$

   Justifica tu respuesta.